

Chapitre 2 : Chute verticale d'un solide.

Objectifs :

- Qu'est-ce qu'un champ de pesanteur ?
- Chute verticale sans frottement fluide
- Chute verticale dans un fluide

I. Qu'est-ce qu'un champ de pesanteur ?

- Tout corps de masse m situé au voisinage de la Terre est soumis à la force de pesanteur : le poids $\vec{P}$ dont les caractéristiques sont les suivantes :
 - *Point d'application* : centre d'inertie
 - *Direction* : verticale
 - *Sens* : vers le bas (centre de la Terre)
 - *Norme* :

$$\vec{P} = m \times \vec{g}$$

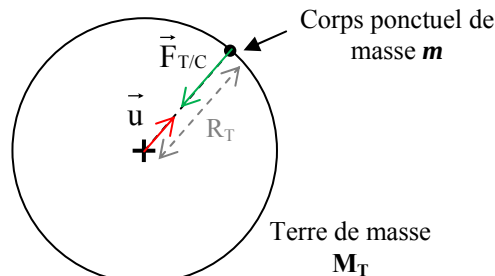
P : poids en N
 m : masse en kg
 g : intensité de la pesanteur en $\text{N} \cdot \text{kg}^{-1}$

- Dans un référentiel galiléen, le **poids d'un corps**, supposé ponctuel, de masse m , peut **s'identifier à la force d'attraction gravitationnelle de la Terre sur ce corps** si celui se trouve au voisinage de la surface terrestre.

Si le corps est au niveau du sol terrestre, on a :

$$\vec{F}_{T/C} = -G \times \frac{m \times M_T}{R_T^2} \cdot \vec{u}$$

$F_{T/C}$, en N, force d'attraction gravitationnelle de la Terre sur le corps
 G , constante de gravitation universelle, $= 6,67 \times 10^{-14} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
 m , en kg, masse du corps
 M_T , en kg, masse de la Terre
 R_T , **en m**, rayon terrestre



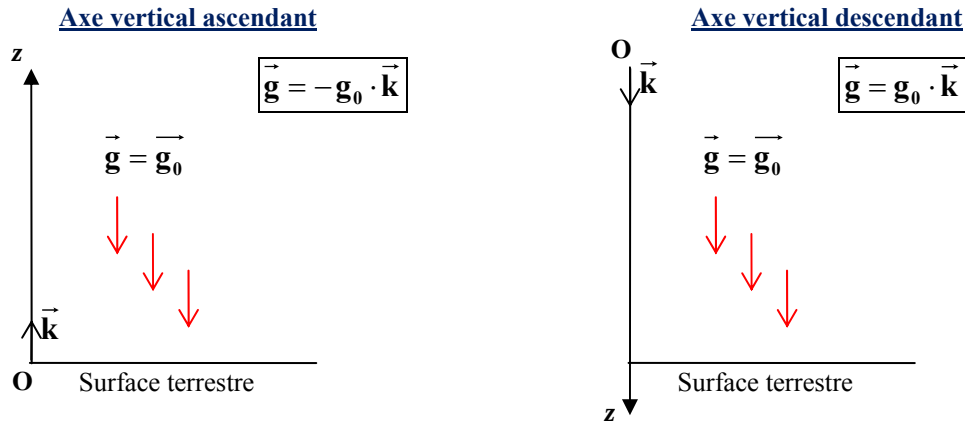
De manière générale, si le corps est à une altitude z (m) par rapport à la surface terrestre, on a :

$$\vec{F}_{T/C} = -G \times \frac{m \times M_T}{(R_T + z)^2} \cdot \vec{u}$$

$$\vec{F}_{T/C} = m \times \frac{-G \times M_T}{(R_T + z)^2} \cdot \vec{u} = \vec{P}$$

Soit $\boxed{\vec{P} = m \times \vec{g}}$ avec $\vec{g} = -\frac{G \times M_T}{(R_T + z)^2} \cdot \vec{u} = -g \cdot \vec{u}$ et $g = \frac{G \times M_T}{(R_T + z)^2}$

- g dépend de l'altitude z et de la latitude (aux pôles g est plus important qu'à l'équateur).
- A chaque point M présent au voisinage de la Terre on associe un vecteur $\vec{g}(M)$.
 On définit ainsi un champ de vecteur $\vec{g}(M)$ appelé **champ de pesanteur** (la direction, le sens et la valeur de g dépendent du lieu considéré).
- On considèrera, en tout point M d'une zone restreinte à la surface terrestre (inférieure à quelques km), que le champ de pesanteur est localement uniforme (même direction, même sens et même valeur). On aura donc $\vec{g}(M) = \vec{g}_0 = \text{Cste}$.



À Paris (ou Strasbourg), on retiendra que $g = 9,81 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$ ou $9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

II. Chute verticale sans frottement fluide

II.1. Chute libre

- Un corps est dit en chute libre s'il n'est soumis qu'à son propre poids $\vec{P}$.
- C'est le cas d'un corps en chute libre dans le vide. C'est également valable lorsque les autres forces comme la poussée d'Archimède et les forces de frottements fluides sont négligeables devant le poids (ex : bille en acier dans l'air).

II.2. Bilan dynamique

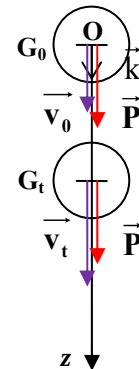
- Soit la chute libre d'un corps de masse m dans un champ de pesanteur uniforme $\vec{g}$ du référentiel terrestre supposé galiléen. On supposera qu'à l'instant $t = 0\text{s}$, le centre d'inertie G du corps est animé d'une vitesse initiale $\vec{v}_0$ verticale vers le bas.

- Système : {corps}
Référentiel : terrestre supposé galiléen
Bilan des forces extérieures : - poids $\vec{P}$

- Appliquons la deuxième loi de Newton : $\vec{P} = m \cdot \vec{a}_G$
 $m \cdot \vec{g} = m \cdot \vec{a}_G$

Soit

$$\boxed{\vec{g} = \vec{a}_G}$$



- **L'accélération du centre d'inertie G du corps ne dépend pas de sa masse lors sa chute libre.**
- Remarque : c'est pour cela qu'on parle également de g comme accélération de la pesanteur (d'où g exprimé en $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$).
- Ex : une accélération de la pesanteur de $2g$ donne l'impression que le poids est multiplié par 2 !

II.3. Équations horaires

- On projette la relation vectorielle issue de la deuxième loi de Newton selon les axes du repère d'espace $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$; on en déduit que l'accélération a_G n'a qu'une seule coordonnée selon Oz : Soit :

$$\vec{a}_G(t) : \left\{ \begin{array}{l} a_{Gx} = \frac{dv_x}{dt} = 0 \\ a_{Gy} = \frac{dv_y}{dt} = 0 \\ a_{Gz} = \frac{dv_z}{dt} = g \end{array} \right.$$

en intégrant par rapport au temps on obtient :

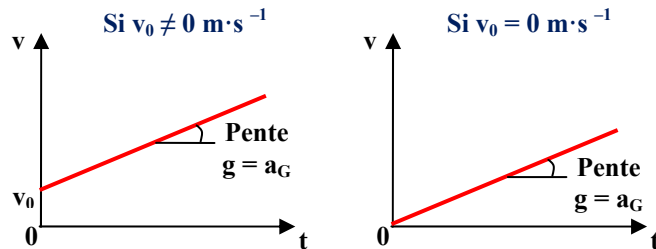
$$\vec{v}_G(t) : \begin{cases} v_{Gx} = \frac{dx}{dt} = C_1 \\ v_{Gy} = \frac{dy}{dt} = C_2 \\ v_{Gz} = \frac{dz}{dt} = g \cdot t + C_3 \end{cases}$$

les constantes C_1 , C_2 et C_3 se déduisent d'après les conditions initiales :

$$\text{À } t = 0 \text{ s on a } \vec{v}_{G0} : \begin{cases} v_{G0x} = C_1 = 0 \\ v_{G0y} = C_2 = 0 \\ v_{G0z} = g \times 0 + C_3 = v_0 \end{cases}$$

$$\text{donc } \vec{v}_G(t) : \begin{cases} v_{Gx} = 0 \\ v_{Gy} = 0 \\ v_{Gz} = g \cdot t + v_0 \end{cases}$$

La courbe $v_G = f(t)$ est une fonction affine (ou linéaire si $v_0 = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$).



en intégrant de nouveau par rapport au temps on obtient **les équations horaires du mouvement** :

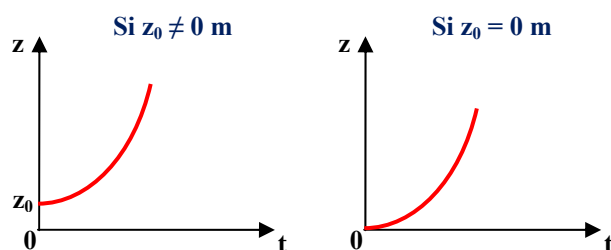
$$\vec{OG}(t) : \begin{cases} x(t) = C_4 = 0 \\ y(t) = C_5 = 0 \\ z(t) = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_0 \cdot t + C_6 \end{cases}$$

les constantes C_4 , C_5 et C_6 se déduisent d'après les conditions initiales :

$$\text{À } t = 0 \text{ s on a } \vec{OG}_0 : \begin{cases} x(0) = C_4 = 0 \\ y(0) = C_5 = 0 \\ z(0) = \frac{1}{2} \times g \times 0^2 + v_0 \times 0 + C_6 = 0 \end{cases}$$

$$\text{donc } \vec{OG}(t) : \begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = 0 \\ z(t) = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_0 \cdot t \end{cases}$$

La courbe $z = f(t)$ est une parabole.



Conclusion :

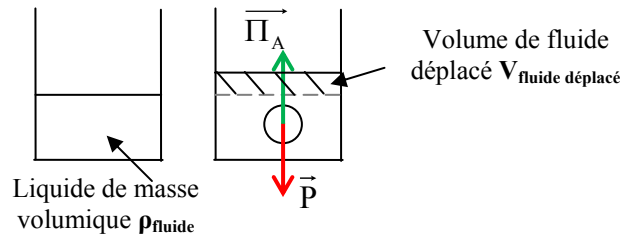
- Le mouvement de chute libre verticale est un **mouvement uniformément accéléré** ($a = \text{cst}$).
- Les **conditions initiales** sont très importantes dans la détermination des équations horaires du mouvement.
- **L'orientation de l'axe verticale Oz** est également très importante !

III. Chute verticale dans un fluide

On entend par fluide : un liquide ou un gaz ou un mélange de gaz.

III.1. La poussée d'Archimède

- On considère une bille, de masse m et de volume V , que l'on dépose dans un récipient dans lequel se trouve un liquide de masse volumique ρ_{fluide} .



- Système : {la bille}
Référentiel : terrestre supposé galiléen
Bilan des forces extérieures : - poids $\vec{P}$ - poussée d'Archimède $\vec{\Pi}_A$
- **Théorème d'Archimède :**
Tout corps, placé dans un fluide, subit de la part de celui-ci une force notée $\vec{\Pi}_A$ verticale, dirigée vers le haut et de norme égale au poids du volume de fluide déplacé.
- La poussée d'Archimède correspond en fait à la résultante des forces pressantes qu'exerce le fluide sur le corps immergé. Elle s'applique rigoureusement au centre de poussée C (qui correspond au centre de masse du fluide déplacé).
- Le poids du volume déplacé a pour expression :

$$\Pi_A = m_{\text{fluide déplacé}} \times g, \text{ comme } m_{\text{fluide déplacé}} = \rho_{\text{fluide}} \times V_{\text{fluide déplacé}}$$

Soit :

$$\Pi_A = \rho_{\text{fluide}} \times V_{\text{fluide déplacé}} \times g$$

Π_A , en N, poussée d'Archimède

ρ_{fluide} , en $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$, masse volumique du fluide

$V_{\text{fluide déplacé}}$, en m^3 , volume de fluide déplacé

g , en $\text{N} \cdot \text{kg}^{-1}$ ou $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$, intensité ou accélération de la pesanteur

En terme de vecteur la poussée d'Archimède s'exprime par : $\vec{\Pi}_A = - \rho_{\text{fluide}} \times V_{\text{fluide déplacé}} \times \vec{g}$

- Remarque : si le corps est totalement immergé (cas des exercices !) alors :

$$V_{\text{fluide déplacé}} = V_{\text{corps}} = V \text{ et donc } \vec{\Pi}_A = \rho_{\text{fluide}} \times V \times \vec{g}$$

- On pourra négliger la poussée d'Archimède $\vec{\Pi}_A$ devant le poids $\vec{P}$ du corps si $\frac{P}{\Pi_A} \geq 10^2$ ou si c'est indiqué dans l'énoncé.

III.2. Forces de frottements fluides

- Lorsqu'un solide est en mouvement de translation à la vitesse $\vec{v}$ dans un fluide, il subit de la part de celui-ci des forces de frottements fluides $\vec{f}$ s'opposant à son mouvement.

La force de frottements fluides résultante aura donc **même direction que $\vec{v}$ mais de sens opposé**.



- La valeur de f est liée à la vitesse v du corps par la relation :

$$\boxed{f = k \times v^n}$$

f , en N, force de frottements fluides
 k , unités à déterminer selon le cas, constante qui dépend de la forme de l'objet, de la nature du fluide...
 n , sans unité, nombre réel qui dépend de la vitesse de l'objet

- Pour les **faibles vitesses** on aura : $f = k \times v$ et on parle d'**écoulement laminaire**. **Fig 2A p 195**
 Pour les **vitesses élevées** on aura : $f = k \times v^2$ et on parle d'**écoulement turbulent**. **Fig 2B p 195**

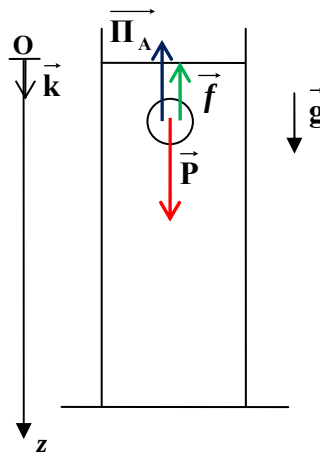
III.3. Bilan dynamique et courbe expérimentale de $v = f(t)$

- Soit une bille, de masse m , de volume V et de masse volumique ρ_{bille} , qui est lâchée sans vitesse initiale dans un fluide de masse volumique ρ_{fluide} .

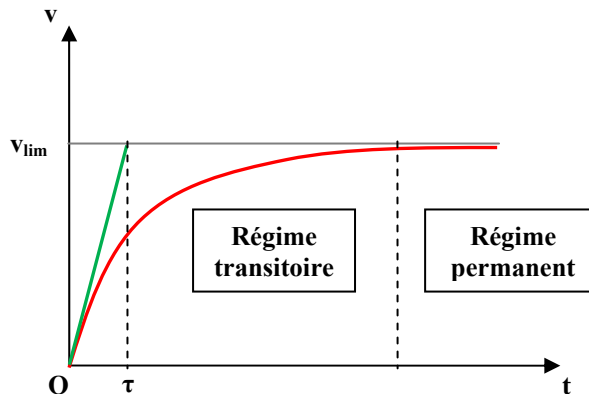
- Système : {la bille}

Référentiel : terrestre supposé galiléen

Bilan des forces extérieures : - poids $\vec{P}$ - poussée d'Archimède $\vec{\Pi}_A$ - frottements fluides : $\vec{f}$



- Expérimentalement la courbe de la vitesse en fonction du temps $v(t)$ à l'allure suivante :



- τ est appelé le **temps caractéristique** du mouvement, il nous donne un renseignement sur la durée du **régime transitoire**. τ est exprimé **en seconde**.
 À $t = 5\tau$ on a $v(5\tau) = v_{\text{lim}}$ et on a atteint le **régime permanent**.
 τ dépend de la nature du fluide.

III.4. Équation différentielle du mouvement et exploitation

- D'après la deuxième loi de Newton on a : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m \cdot \vec{a}_G$

$$\text{Soit } \vec{P} + \vec{\Pi}_A + \vec{f} = m \cdot \vec{a}_G.$$

- Or le mouvement de la bille se fait uniquement selon l'axe Oz donc en projetant cette relation selon l'axe Oz on a :

$$P - \Pi_A - f = m \cdot a_{Gz}$$

$$m \cdot g - \Pi_A - f = m \cdot a_{Gz}$$

$$m \cdot g - \rho_{\text{fluide}} \cdot V \cdot g - k \cdot v_{Gz}^n = m \cdot \frac{dv_{Gz}}{dt}$$

Comme le mouvement se fait selon l'axe Oz on a $\vec{v} = v \cdot \vec{k} = v_z \cdot \vec{k}$ avec $v = v_z > 0$

$$m \cdot g - \rho_{\text{fluide}} \cdot V \cdot g - k \cdot v_G^n = m \cdot \frac{dv_G}{dt}$$

$$g - \frac{\rho_{\text{fluide}} \cdot V \cdot g}{m} - \frac{k}{m} \cdot v_G^n = \frac{dv_G}{dt}$$

De plus $m = \rho_{\text{bille}} \times V$ donc $g - \frac{\rho_{\text{fluide}} \cdot V \cdot g}{\rho_{\text{bille}} \cdot V} - \frac{k}{m} \cdot v_G^n = \frac{dv_G}{dt}$

En simplifiant on a : $g - \frac{\rho_{\text{fluide}}}{\rho_{\text{bille}}} \cdot g - \frac{k}{m} \cdot v_G^n = \frac{dv_G}{dt}$ ou $\boxed{g \cdot \left(1 - \frac{\rho_{\text{fluide}}}{\rho_{\text{bille}}}\right) - \frac{k}{m} \cdot v_G^n = \frac{dv_G}{dt}}$

En posant $A = g \cdot \left(1 - \frac{\rho_{\text{fluide}}}{\rho_{\text{bille}}}\right) = \text{Cste}$ et $B = \frac{k}{m} = \text{Cste}$ on a $A - B \cdot v_G^n = \frac{dv_G}{dt}$

➤ À $t = 0s$, on a $a_G = a_0 = \frac{dv_G}{dt} \Big|_{t=0}$ et la force de frottement fluide $f = 0 \text{ N}$ car $v = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ donc

$$\boxed{a_0 = \frac{dv_G}{dt} \Big|_{t=0} = A = g \cdot \left(1 - \frac{\rho_{\text{fluide}}}{\rho_{\text{bille}}}\right)}$$

➤ En régime permanent ($t \rightarrow \infty$) on a : $v = v_{\text{lim}}$ et $a_{G\infty} = \frac{dv_G}{dt} \Big|_{t=\infty} = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ ce qui donne :

$$0 = A - B \cdot v_{\text{lim}}^n \quad \text{soit} \quad v_{\text{lim}}^n = \frac{A}{B} \quad \text{donc} \quad \boxed{v_{\text{lim}} = \left(\frac{A}{B}\right)^{1/n} = \sqrt[n]{\left(\frac{A}{B}\right)}}$$

En écoulement laminaire, $n = 1$, et $v_{\text{lim}} = \left(\frac{A}{B}\right)^{1/1} = \frac{A}{B}$

En écoulement turbulent, $n = 2$, et $v_{\text{lim}} = \left(\frac{A}{B}\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{A}{B}}$

➤ Lien entre τ , a_0 et v_{lim} :

La tangente à l'origine coupe l'asymptôte de la courbe $v(t)$ au point d'abscisse $t = \tau$ et on a la relation :

$$v_{\text{lim}} = a_0 \times \tau$$